
POLITECHNIKA KOSZALIŃSKA

WYDZIAŁ MECHANICZNY

kierunek Mechanika i Budowa Maszyn

Monitorowanie procesów wytwarzania

Ocena zdolności jakościowej procesów

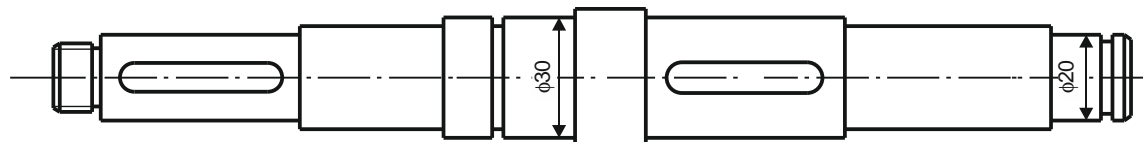
Koszalin

Umiejętności i kompetencje:

Umiejętności formułowania i weryfikacji hipotez statystycznych, umiejętność określania wskaźników zdolności jakościowej procesu oraz ich interpretacji, umiejętność określanie frakcji wyrobów niezgodnych z wymaganiami technologicznymi.

Ocena zdolności jakościowej procesów o rozkładzie normalnym

W procesie wytwarzania wielostopniowego wałka istotne jest zapewnienie wymaganej odchyłki średnic czopów łożysk tocznych (średnica 1 wałka $20\text{mm}^{+0,1\text{mm}}$, średnica 2 wałka $30\text{mm}^{-0,2\text{mm}}$)
 Dokonano pomiaru średnic wałka próbek pobieranych w odstępie 30 minut (każda z próbek zawierała 5 losowo wybranych wałków w 5 jednorodnych podgrupach z partii 100 sztuk). Wyniki pomiarów zestawiono w tablicy 1 i 2 (plik ocenazdolnoscip1.mat).



Rysunek 1. Schemat wytwarzanego wałka z wyszczególnieniem monitorowanych wymiarów czopów łożysk tocznych

Tablica 1. Wyniki pomiarów średnicy 1 wałka

		Numer próbki									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Podgrupa 1	1	20,027	20,009	20,014	20,026	19,993	20,012	20,003	20,011	19,990	19,994
	2	19,999	19,980	19,987	19,989	20,030	20,038	19,998	19,998	20,015	20,032
	3	19,984	19,988	20,012	20,006	20,016	19,982	19,999	19,983	20,012	20,039
	4	19,993	19,994	20,006	20,002	20,004	20,010	19,986	19,990	19,957	20,005
	5	20,001	20,008	19,963	20,004	20,014	19,958	19,994	20,017	20,014	20,035
Podgrupa 2	1	19,995	20,013	20,011	20,012	19,991	20,006	19,996	20,013	20,003	19,986
	2	20,024	20,012	19,991	20,009	19,975	20,010	19,981	19,991	19,964	20,010
	3	20,034	19,988	20,005	20,012	20,019	19,984	19,993	20,007	20,019	19,956
	4	19,969	19,998	19,979	20,015	20,019	20,047	19,986	20,001	20,031	19,969
	5	19,970	20,011	20,018	19,989	19,986	19,975	20,007	20,009	19,992	20,042
Podgrupa 3	1	19,996	20,008	19,978	19,984	20,022	19,994	20,001	20,030	19,998	19,959
	2	20,003	20,003	19,989	19,988	20,040	20,003	20,036	20,001	20,014	19,967
	3	20,000	20,037	19,986	20,013	19,990	20,002	20,014	20,022	19,997	20,004
	4	20,010	20,031	20,015	19,964	19,993	19,991	19,999	20,016	19,994	19,968
	5	19,990	20,000	20,012	20,002	19,988	20,005	19,993	20,013	20,005	19,990
Podgrupa 4	1	20,035	19,972	20,027	19,986	19,970	20,006	20,017	19,975	19,995	20,000
	2	20,011	19,983	19,988	20,042	19,981	19,986	20,005	19,966	20,005	19,995
	3	19,997	19,985	19,975	19,973	19,977	19,989	19,987	20,004	20,029	19,993
	4	20,001	20,027	19,983	20,004	19,988	19,999	20,049	19,988	19,973	19,998
	5	19,979	19,984	20,007	19,937	20,011	19,989	19,987	20,004	19,956	20,019
Podgrupa 5	1	19,978	19,985	20,007	20,017	19,989	20,009	20,022	19,977	20,001	20,025
	2	19,983	19,976	19,985	19,990	20,011	19,994	19,979	19,997	20,030	19,998
	3	20,007	20,006	20,039	20,025	20,015	19,996	20,005	20,005	19,988	20,013
	4	20,022	19,995	20,009	20,005	20,004	19,982	19,995	19,977	20,014	19,994
	5	19,994	20,010	20,022	20,005	19,985	20,036	19,973	20,011	19,999	19,999
		Numer próbki									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Podgrupa 1	1	19,978	20,017	20,010	20,065	19,996	20,022	20,003	20,001	19,991	20,030
	2	19,996	19,983	19,996	20,003	20,020	19,978	19,969	19,994	19,974	19,978

	3	19,990	19,994	20,016	19,995	19,961	19,967	19,975	20,026	19,985	20,000
	4	20,010	20,026	19,984	20,023	19,985	19,994	20,002	20,006	20,026	19,953
	5	19,962	19,998	20,012	20,018	19,990	19,982	20,009	19,966	20,002	19,981
Podgrupa 2	1	19,969	19,989	20,026	19,984	19,974	19,971	19,993	20,002	20,058	20,039
	2	20,002	19,969	19,994	20,021	19,992	19,966	19,975	20,013	19,999	19,976
	3	20,031	20,017	20,007	19,981	20,013	19,973	20,053	20,018	20,007	19,974
	4	19,986	19,985	19,995	19,983	19,982	20,028	20,021	20,004	19,959	20,004
	5	19,993	20,022	19,934	19,974	19,983	20,009	19,973	20,024	20,025	19,985
Podgrupa 3	1	19,966	20,001	20,046	20,009	20,019	19,985	19,996	19,994	20,019	19,992
	2	20,014	19,979	19,981	19,973	20,001	20,000	20,006	20,000	19,959	20,009
	3	20,018	19,987	19,962	20,013	20,009	20,020	19,995	19,996	19,981	20,018
	4	20,037	20,008	20,027	19,993	20,010	19,985	20,011	19,987	19,969	19,982
	5	20,022	19,999	20,021	19,969	20,024	20,005	20,024	19,982	20,032	19,990
Podgrupa 4	1	20,001	20,017	20,024	19,973	20,017	20,031	19,972	20,008	20,011	19,999
	2	20,002	19,975	19,991	20,020	19,998	20,031	20,012	20,016	20,029	20,017
	3	20,022	20,010	19,998	20,000	20,033	20,012	19,998	20,027	19,982	20,045
	4	20,015	20,036	20,031	20,020	19,997	20,019	19,993	19,950	19,999	19,972
	5	19,983	20,016	20,016	19,993	19,970	19,992	20,003	19,970	20,001	20,003
Podgrupa 5	1	20,011	19,999	19,951	20,004	20,046	19,996	20,016	19,979	20,009	19,984
	2	20,002	19,988	19,992	20,006	19,992	20,001	20,032	20,006	19,994	20,021
	3	19,988	19,982	19,982	19,979	19,999	19,988	19,986	20,020	20,021	20,013
	4	20,001	19,993	20,008	20,023	20,003	20,036	19,997	19,975	20,006	20,014
	5	19,997	20,002	19,987	19,986	19,976	20,011	19,996	20,029	19,974	20,013

Tablica 2. Wyniki pomiarów średnicy 2 wałka

		Numer próbki									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Podgrupa 1	1	30,031	30,005	29,965	29,952	29,97	29,925	30,011	29,949	29,99	29,984
	2	29,998	30,054	29,971	29,988	30,003	30,009	29,978	29,947	30,028	30,019
	3	29,936	30,011	30,058	30,007	29,999	30,046	30,028	29,967	30	30,005
	4	29,97	29,932	29,987	29,999	29,994	29,987	29,994	30,042	30,039	30,01
	5	30,025	29,994	30,05	30,049	30	29,981	29,968	29,939	30,009	29,991
Podgrupa 2	1	29,989	30	30,028	30,017	29,956	29,983	29,996	30,039	30,011	29,982
	2	29,981	29,958	30,02	30,017	30,007	29,953	30,014	30,035	30,002	30,017
	3	30,035	29,983	30,023	29,969	30,009	30,019	30,056	30,03	29,996	30,048
	4	30,028	29,995	29,996	29,95	30,037	29,967	29,976	29,971	30,077	29,954
	5	30,037	30,009	30,012	30,033	29,954	30,017	29,933	30,022	29,958	29,947
Podgrupa 3	1	30,031	30,073	29,964	29,984	29,981	30,032	29,955	30,038	29,915	30,012
	2	29,984	29,999	30,027	30,004	30,036	30,025	29,995	30,004	30,009	30,011
	3	29,927	30,023	29,983	30,007	30,019	30,014	29,994	29,987	30,031	29,987
	4	30,047	29,995	29,975	29,998	29,993	30,001	30,025	30,001	30,021	30,018
	5	29,972	30,013	29,955	30,008	29,958	30,053	30,028	30,055	29,991	29,981
Podgrupa 4	1	29,996	29,977	29,998	30,013	29,956	30,01	29,996	29,958	29,995	30,016
	2	29,992	29,979	29,988	30,041	29,978	29,979	29,959	29,97	30,012	30,047
	3	29,985	29,961	30,032	30,03	30,041	30,005	30,033	30,036	29,982	30,014
	4	30,004	29,993	30,005	30,013	29,996	29,973	30,044	30,031	29,994	29,971
	5	30,007	30,019	30,036	29,958	30,002	29,968	29,992	30,028	29,986	29,995
5	1	29,988	30,042	29,988	29,982	30,056	30,04	30,028	29,972	29,981	30,011

	2	30,022	30,01	29,956	30,051	29,998	30,017	29,996	30,005	30,012	29,978
	3	30,016	29,975	29,98	29,974	30,014	29,988	30,034	29,981	30,013	29,988
	4	29,999	29,997	29,976	29,959	30,012	30,004	30,024	30,002	29,934	30,011
	5	29,997	29,993	30,02	30,004	30,025	30	29,953	29,987	30,019	30,008
		Numer próbki									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Podgrupa 1	1	29,975	29,961	30,025	30,021	30,012	29,976	30,012	29,988	29,959	30,037
	2	29,973	29,965	30,016	29,965	30,001	29,989	29,987	30,019	30,045	30,032
	3	29,986	29,952	29,968	29,992	30,029	30,081	30,016	30,02	29,973	29,988
	4	29,991	29,976	29,957	29,997	29,995	30,043	30,07	30,049	30,009	30,011
	5	29,979	30,008	30,03	30,014	29,965	29,989	29,935	30,019	29,985	30,006
Podgrupa 2	1	30,033	30,004	30,011	30,013	29,986	30,016	29,997	30,003	29,988	30,017
	2	30,001	30,07	30,038	29,994	29,983	30,011	30,027	30,021	30,003	29,938
	3	29,964	29,996	29,982	29,981	29,962	29,986	29,98	30,026	29,979	29,963
	4	29,979	30,052	30,046	30,062	29,981	30,017	29,997	29,998	30,005	29,977
	5	30,037	29,994	29,97	30,043	29,991	29,948	30,017	30	30,028	30,037
Podgrupa 3	1	30,025	29,991	29,974	29,939	30,012	29,97	30,026	30,008	29,997	29,994
	2	30,006	29,984	29,986	30,031	30,033	30,013	29,992	30,004	30,021	29,977
	3	30,017	29,984	30,02	29,982	29,964	29,98	29,997	29,98	29,975	29,984
	4	29,99	29,984	29,97	30,01	30,01	29,986	30,041	29,966	29,944	29,979
	5	29,988	29,993	30,015	30,026	30,059	29,987	30,015	29,973	30,012	29,943
Podgrupa 4	1	30,001	30,017	30,003	30,02	29,975	29,967	29,997	29,98	30,006	29,971
	2	29,996	30,045	30,01	29,997	29,982	30,028	30,004	30,008	29,963	30,016
	3	30,005	29,991	29,988	30,006	30,019	30,026	29,958	29,957	29,999	29,974
	4	30,019	29,96	29,95	29,985	29,994	29,989	30,001	29,984	30,004	29,973
	5	30,027	29,977	30,064	30,008	29,989	30,025	29,994	29,949	30,002	30,045
Podgrupa 5	1	29,996	30,047	29,988	29,965	30,005	30,022	30,009	29,99	30,018	30,038
	2	30,037	29,989	29,987	29,993	30,054	30,005	30	30,025	30,038	29,968
	3	30,002	30,063	29,998	30,021	30,007	29,969	29,976	30,004	30,055	30,047
	4	30,021	30,017	29,979	29,974	30,035	29,974	29,948	30,001	29,969	30,045
	5	29,961	29,992	30,035	29,963	29,959	29,999	29,995	30,038	30,026	30,041

Ocena zdolności jakościowej procesu wymaga weryfikacji zgodności rozkładu wyników pomiarów z rozkładem normalnym. Ocenę zgodności rozkładu dokonano metodami przybliżonymi oraz z wykorzystaniem testów statystycznych.

Ocena zgodności rozkładu wyników pomiarów z rozkładem normalnym

a) na podstawie oceny parametrów rozkładu (za: Stanisław Płaska „Wprowadzenie do statystycznego sterowania procesami technologicznymi”, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej 2000)

Dokonano oceny rozkładu na podstawie jego parametrów. Wyznaczono następujące parametry rozkładu zgodnie z poniższymi zależnościami:

średnia

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- **mediana**

$$m_e = \begin{cases} \frac{x_{n+1}}{2}, & n \text{ nieparzyste} \\ \frac{\left(\frac{x_n}{2} + \frac{x_{n+1}}{2}\right)}{2}, & n \text{ parzyste} \end{cases}$$

- **modalna** - dla szeregów szczegółowych oraz szeregów rozdzielczych punktowych modalna odpowiada wartości cechy o największej liczebności (częstości).
- **odchylenie standardowe**

$$\hat{\sigma} = \hat{S} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- **skośność**

$$A_k = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\sigma^3}$$

- **kurtoza**

$$K = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\sigma^4}$$

- **współczynniki weryfikacji u dopasowania skośności i kurtozy do rozkładu normalnego** (wartość $|u| \geq 1,64$ wskazują na odstępstwa od rozkładu normalnego)
 - **dla skośności**

$$u \cong A_k \cdot \sqrt{\frac{n+6}{6}}, n \geq 25$$

- **dla kurtozy**

$$u \cong (\sqrt{K} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\frac{n+25}{2}}, n \geq 50$$

Wyznaczone parametry zestawiono w tablicy 3 i 4 oraz dokonano ich analizy.

Tablica 3. Wyniki oceny rozkładu na podstawie parametrów dla średnicy 1 wałka

Lp.	Nazwa parametru	Wartość		Uwagi
		obserwacja	normalny	
1	Średnia	20,0000	μ	
2	Mediana	20,0000	μ	
3	Modalna	19,9940	μ	Niewielka różnica wskazująca na bardzo małą skośność rozkładu
4	odchylenie standardowe	0,0201	δ	
5	Skośność	0,0079	0	Bardzo mała skośność rozkładu
6	Kurtoza	3,0945	3	Bardzo mała wypukłość rozkładu
7	współczynnik u dla skośności	0,0725	0	Brak podstaw do traktowania rozkładu jako odmiennego od rozkładu normalnego (podstawą odrzucenia $ u \geq 1,64$)
8	współczynnik u dla kurtozy	0,4385	0	

WNIOSKI: Ocena parametrów rozkładu sugeruje rozkład normalny wyników pomiarów średnicy 1 wałka.

Tablica 4. Wyniki oceny rozkładu na podstawie parametrów dla średnicy 2 wałka

Lp.	Nazwa parametru	Wartość		Uwagi
		obserwacja	normalny	
1	Średnia	30,0001	μ	
2	Mediana	29,9995	μ	
3	Modalna	29,9880	μ	Niewielka różnica wskazująca na bardzo małą skośność rozkładu
4	odchylenie standardowe	0,0287	δ	
5	Skośność	-0,0021	0	Bardzo mała skośność rozkładu
5	Kurtoza	2,8337	3	Niewielka wklęsłość rozkładu
6	u dla skośności	-0,0188	0	Brak podstaw do traktowania rozkładu jako odmiennego od rozkładu normalnego (podstawą odrzucenia $ u \geq 1,64$)
7	u dla kurtozy	-0,7890	0	
8	u dla a	0,2748	0	

WNIOSKI: Ocena parametrów rozkładu sugeruje rozkład normalny wyników pomiarów średnicy 2 wałka.

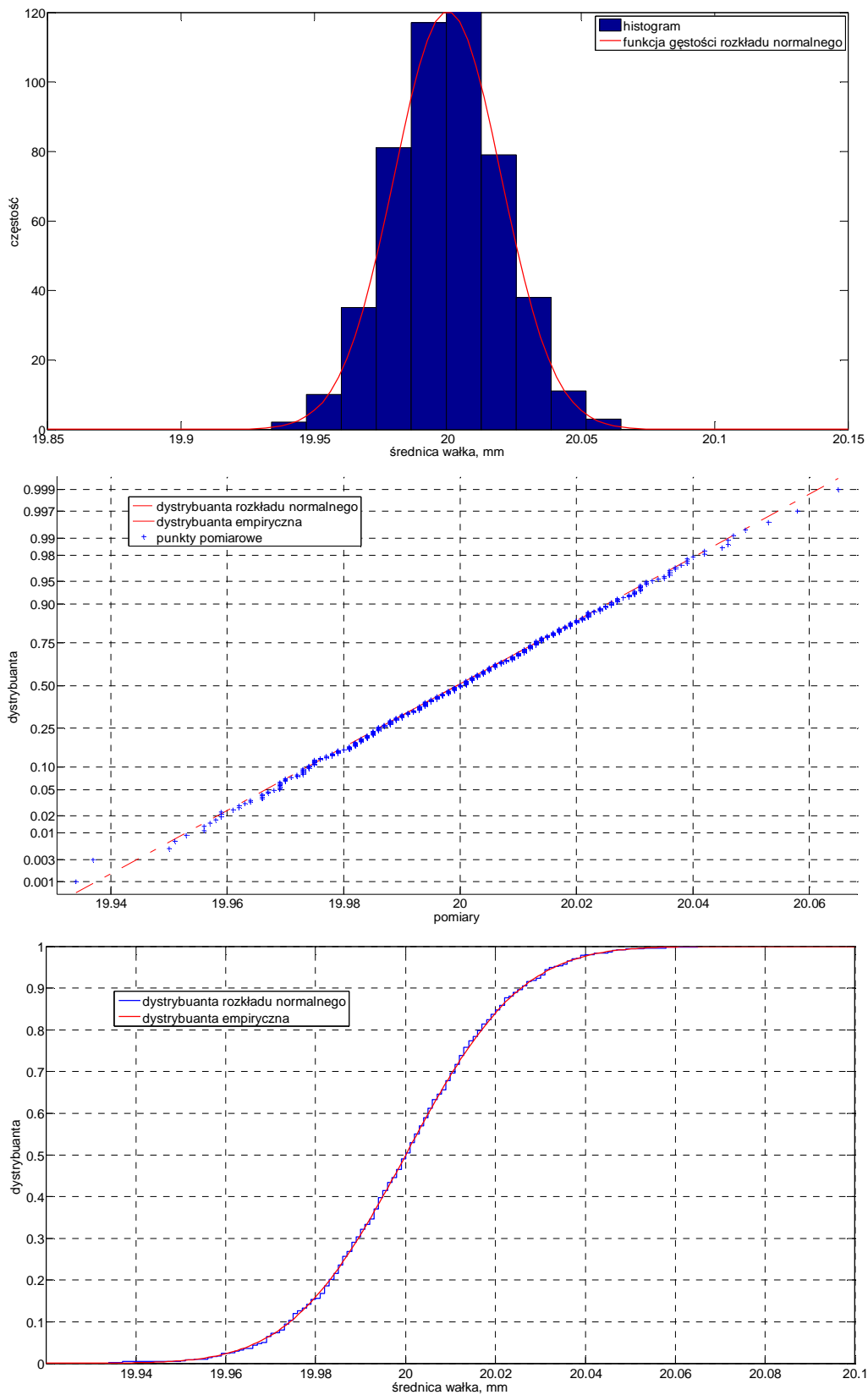
b) na podstawie analizy graficznej

Średnica 1 wałka

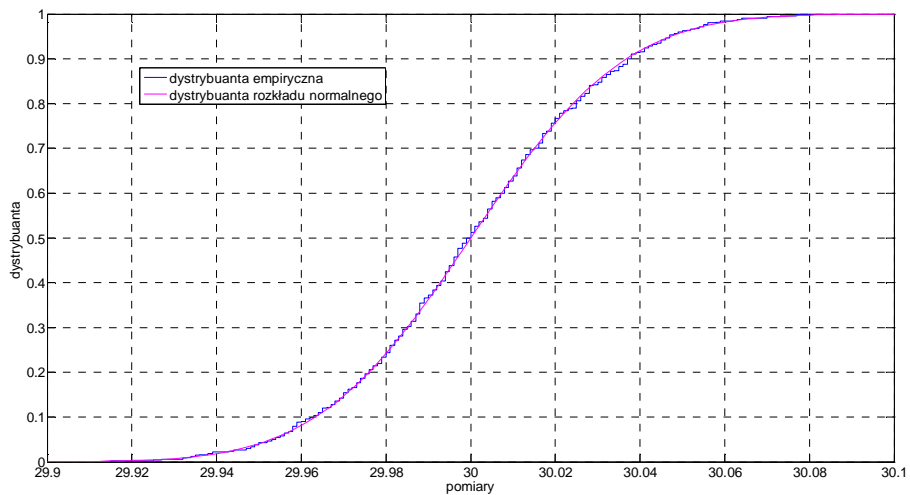
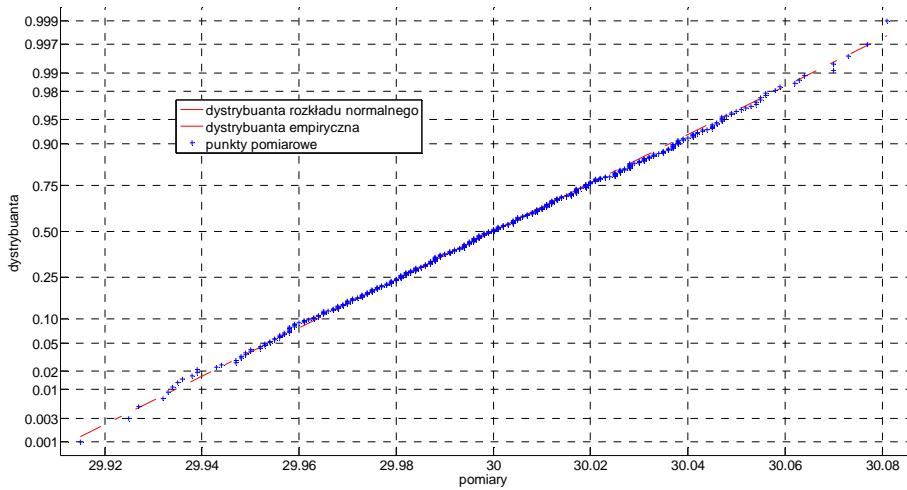
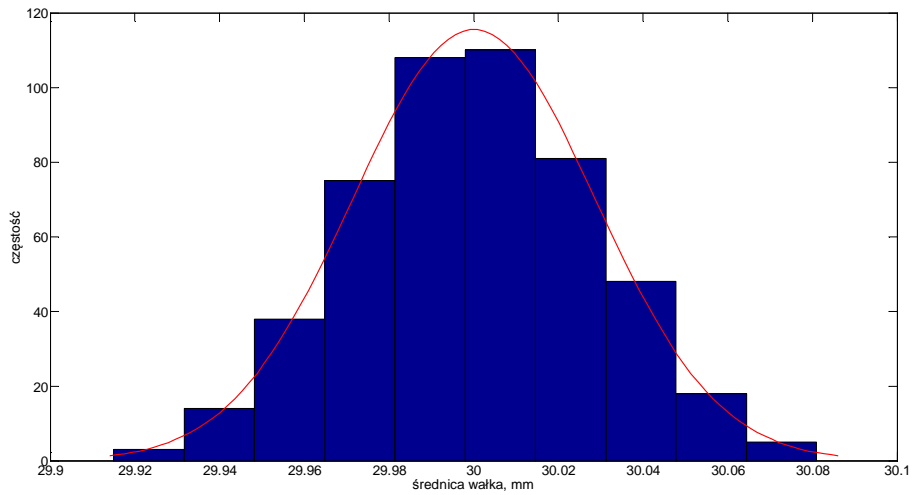
Analiza graficzna zgodności rozkładu empirycznego z teoretycznym rozkładem normalnym (przedstawiona na rysunku 2) wskazuje na dużą zgodność obu rozkładów.

Średnica 2 wałka

Analiza graficzna zgodności rozkładu empirycznego z teoretycznym rozkładem normalnym (przedstawiona na rysunku 3) wskazuje na dużą zgodność obu rozkładów.



Rysunek 2. Analiza graficzna postaci rozkładu: a) histogram aproksymowany rozkładem normalnym, b) wykresy punktów pomiarowych na dystrybuancie teoretycznej rozkładu normalnego, c) wykresy dystrybuanty rozkładu normalnego i dystrybuanty empirycznej



Rysunek 3. Analiza graficzna postaci rozkładu: a) histogram aproksymowany rozkładem normalnym, b) wykresy punktów pomiarowych na dystrybuancie teoretycznej rozkładu normalnego, c) wykresy dystrybuanty rozkładu normalnego i dystrybuanty empirycznej

Określenie normalności rozkładu – test zgodności

Wyniki pomiarów pogrupowano w szereg rozdzielczy o 8 rozłącznych klasach tak aby licznosc każdej z klas nie była mniejsza niż 8, otrzymując rozkład empiryczny $F(x)$. Następnie przeprowadzono testy zgodności rozkładu empirycznego $F(x)$ z rozkładem normalnym $F_n(x)$. W tym celu zweryfikowano nieparametryczną hipotezę:

$$H_0: F(x) = F_n(x)$$

wobec hipotezy alternatywnej:

$$H_1: F(x) \neq F_n(x)$$

Do weryfikacji hipotezy zastosowano test Kołmogorowa-Smirnowa oraz test χ^2 .

Test D_n Kołmogorowa-Smirnowa

- określono licznosci w przedziałach klasowych n_i
- wyznaczono dystrybuantę rozkładu empirycznego $F(x)$

$$F(x_i) = \frac{n_i}{n}$$

gdzie: n_i – licznosc i-tym przedziale klasowym, n – liczba pomiarów ($n=500$)

- określono standaryzowane prawe granice klas

$$k_{Si} = \frac{k_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

gdzie: k_i – prawy koniec i-tego przedziału klasowego, $\hat{\mu}$ – wartosc srednia z próbki, $\hat{\sigma}$ – odchylenie standardowe z próbki

- wyznaczono dystrybuantę $F_n(x)$ rozkładu normalnego $N(0,1)$ w punktach określonych przez standaryzowane prawe granice klas
- wyznaczono bezwzględne różnice pomiędzy dystrybuantą rozkładu empirycznego $F(x)$ i dystrybuantą rozkładu normalnego $F_n(x)$

$$d_i = |F(x_i) - F_n(x_i)|$$

- obliczono wartosc statystyki D_n

$$D_n = \sup_x |F(x) - F_n(x)|$$

- obliczono wartosc statystyki granicznej $D_{n\alpha}$

$$D_{n\alpha} = \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$$

gdzie: λ_α – wartosc graniczna statystyki λ Kołmogorowa dla określonego poziomu istotności testu α ($\lambda_{0,05} = 1,354$)

- porównano empiryczną wartosc statystyki D_n z obszarem krytycznym W_1

$$W_1 = \{D_n: D_n \geq D_{n\lambda}\}$$

Wyniki testu Kołmogorowa-Smirnowa zestawiono w tablicy 5 i 6.

Tablica 5. Wyniki testu Kołmogorowa-Smirnowa dla średnicy 1 wałka

Przedziały klasowe	Liczności w rozkładzie empirycznym n_i	Dystrybuanta rozkładu empirycznego $F(x)$	Standaryzowane prawe granice klas x_{1i}	Dystrybuanta rozkładu normalnego $F_n(x)$	$ F(x)-F_n(x) $
$x \in (-\infty, 19,9602)$	12	0,0240	-1,9835	0,0237	0,0003
$x \in (19,9602, 19,9733)$	35	0,0940	-1,3309	0,0916	0,0024
$x \in (19,9733, 19,9864)$	81	0,2560	-0,6783	0,2488	0,0072
$x \in (19,9864, 19,9995)$	117	0,4900	-0,0257	0,4897	0,0003
$x \in (19,9995, 20,0126)$	124	0,7380	0,6269	0,7346	0,0034
$x \in (20,0126, 20,0257)$	79	0,8960	1,2795	0,8996	0,0036
$x \in (20,0257, 20,0388)$	38	0,9720	1,9321	0,9733	0,0013
$x \in (20,0388, \infty)$	14	1,0000	∞	1,0000	0,0000
Wartość statystyki $D_n: \max(F(x)-F_n(x))$					0,0072
Wartość statystyki granicznej $D_{n\alpha}$					0,0606

Tablica 6. Wyniki testu Kołmogorowa-Smirnowa dla średnicy 2 wałka

Przedziały klasowe	Liczności w rozkładzie empirycznym n_i	Dystrybuanta rozkładu empirycznego $F(x)$	Standaryzowane prawe granice klas x_{1i}	Dystrybuanta rozkładu normalnego $F_n(x)$	$ F(x)-F_n(x) $
$x \in (-\infty, 19,9602)$	12	0,0240	-1,9835	0,0237	0,0003
$x \in (19,9602, 19,9733)$	35	0,0940	-1,3309	0,0916	0,0024
$x \in (19,9733, 19,9864)$	81	0,2560	-0,6783	0,2488	0,0072
$x \in (19,9864, 19,9995)$	117	0,4900	-0,0257	0,4897	0,0003
$x \in (19,9995, 20,0126)$	124	0,7380	0,6269	0,7346	0,0034
$x \in (20,0126, 20,0257)$	79	0,8960	1,2795	0,8996	0,0036
$x \in (20,0257, 20,0388)$	38	0,9720	1,9321	0,9733	0,0013
$x \in (20,0388, \infty)$	14	1,0000	∞	1,0000	0,0000
Wartość statystyki $D_n: \max(F(x)-F_n(x))$					0,0072
Wartość statystyki granicznej $D_{n\alpha}$					0,0606

WNIOSKI: W obu przypadkach wartość statystyki empirycznej D_n jest mniejsza od wartości statystyki granicznej $D_{n\alpha}$ zatem brak podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem normalnym

Test χ^2

- określono licznosci w przedziałach klasowych n_i
- określono standaryzowane prawe granice klas

$$ks_i = \frac{k_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

gdzie: k_i – prawy koniec i-tego przedziału klasowego, $\hat{\mu}$ – wartość średnia z próbki, $\hat{\sigma}$ – odchylenie standardowe z próbki

- wyznaczono z rozkładu normalnego dla każdej klasy prawdopodobieństwo

$$p_i = P\{x_{0i} \leq X \leq x_{1i}\} = F_n(x_{1i}) - F_n(x_{0i})$$

gdzie: x_{0i} – standaryzowany lewy koniec i-tej klasy, x_{1i} – standaryzowany prawy koniec i-tej klasy, F_n – dystrybuanta rozkładu normalnego

- określono dla każdej z klasy licznosci teoretyczne np_i rozkładu normalnego, które powinny były wystąpić w n elementowej próbie:
- wyznaczono kolejne kwadraty różnic $(n_i - np_i)^2$ licznosci w rozkładzie empirycznym i hipotetycznym oraz wartość statystyki

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

gdzie: r – liczba klas

- obliczono wartość statystyki granicznej χ_α^2 dla której dla założonego poziomu istotności α zachodzi zależność

$$P\{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2\} = \alpha$$

gdzie: χ_α^2 – wartość z rozkładu χ^2 o $r-2-1$ stopniach swobody

- porównano empiryczną wartość statystyki χ^2 z obszarem krytycznym W_1

$$W_1 = \{\chi^2: \chi^2 \geq \chi_\alpha^2\}$$

Wyniki testu χ^2 zestawiono w tablicy 7 i 8.

Tablica 7. Wyniki testu χ^2 dla średnicy 1 wałka

Przedziały	Licznosci w rozkładzie empirycznym n_i	Standaryzowane prawe granice klas x_{1i}	prawdopodo bieństwo p_i	Licznosci w rozkładzie normalnym np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
$x \in (-\infty, 19,9602)$	12	-1,9835	0,0237	11,8276	0,0025
$x \in (19,9602, 19,9733)$	35	-1,3309	0,0916	33,9972	0,0308
$x \in (19,9733, 19,9864)$	81	-0,6783	0,2488	78,5895	0,0739
$x \in (19,9864, 19,9995)$	117	-0,0257	0,4897	120,4788	0,1004
$x \in (19,9995, 20,0126)$	124	0,6269	0,7346	122,4451	0,0197
$x \in (20,0126, 20,0257)$	79	1,2795	0,8996	82,5014	0,1486
$x \in (20,0257, 20,0388)$	38	1,9321	0,9733	36,8437	0,0363
$x \in (20,0388, \infty)$	14	∞	∞	13,3368	0,0330
Wartość statystyki χ^2: $\sum_{i=1}^r \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$					0,4453
Wartość krytyczna $\chi_{0,95}^2$					11,0705

Tablica 8. Wyniki testu χ^2 dla średnicy 2 wałka

Przedziały	Liczności w rozkładzie empirycznym n_i	Standaryzowane prawe granice klas x_{1i}	prawdopodobieństwo p_i	Liczności w rozkładzie normalnym np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
$x \in (-\infty, 19,9602)$	12	-1,9835	0,0237	11,8276	0,0025
$x \in (19,9602, 19,9733)$	35	-1,3309	0,0916	33,9972	0,0308
$x \in (19,9733, 19,9864)$	81	-0,6783	0,2488	78,5895	0,0739
$x \in (19,9864, 19,9995)$	117	-0,0257	0,4897	120,4788	0,1004
$x \in (19,9995, 20,0126)$	124	0,6269	0,7346	122,4451	0,0197
$x \in (20,0126, 20,0257)$	79	1,2795	0,8996	82,5014	0,1486
$x \in (20,0257, 20,0388)$	38	1,9321	0,9733	36,8437	0,0363
$x \in (20,0388, \infty)$	14	∞	∞	13,3368	0,0330
Wartość statystyki χ^2: $\sum_{i=1}^r \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$					0,4453
Wartość krytyczna $\chi_{0,95}^2$					11,0705

WNIOSKI: W obu przypadkach wartość statystyki empirycznej χ^2 jest mniejsza od wartości statystyki granicznej χ_{α}^2 zatem brak podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem normalnym

Wyznaczenie wskaźników zdolności jakościowej

Celem procesu wytwarzania jest dostarczanie klientowi wyrobów o określonych wymaganiach. W procesach wytwarzania wymogi te są jasno zdefiniowane i dotyczą najczęściej dokładności wymiarowej i kształtowej oraz jakości powierzchni wytwarzanych elementów. Jedną z podstawowych metod oszacowania poziomu jakości wytwarzanych wyrobów jest wyznaczenie jakościowych wskaźników zdolności. Poprawnie prowadzony proces wytwarzania powinien utrzymywać wartości charakterystyk jakościowych w wyznaczonym nominale i nie posiadać rozproszenia. W rzeczywistości jest to stan nieosiągalny, zatem głównymi wskaźnikami oceniającymi zdolność procesu są wskaźniki oceniające zmienność procesu oraz jego wycentrowanie.

Ocena zmienności procesu

Wskaźnik C_p jest stosunkiem dopuszczalnego przedziału zmienności danej cechy (określonej polem tolerancji) do naturalnej zmienności procesu (określonej wielokrotnością miary jego rozrzutu – przy założeniu rozkładu normalnego stosowana jest sześciokrotność odchylenia standardowego):

$$C_p = \frac{T}{\text{naturalna zmienność procesu}} = \frac{GLT - DLT}{6 \cdot \sigma}$$

Zakładając, że proces jest stabilny statystycznie do określenia wartości odchylenia standardowego wyznaczono estymator $\hat{\sigma}_{\bar{R}}$:

$$\hat{\sigma}_{\bar{R}} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

gdzie: d_2 – współczynnik zależny od wielkości próbki (tablica 9).

Tablica 9. Wartości współczynników d_2 dla różnej liczności próbki n

n	2	3	4	5	6	7	8	9
d_2	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97
n	10	11	12	13	14	15	16	17
d_2	3,08	3,17	3,26	3,34	3,41	3,48	3,53	3,59
n	18	19	20	21	22	23	24	25
d_2	3,64	3,69	3,73	3,78	3,82	3,86	3,90	3,93

Wartość średniego rozstępu wyznaczono dla każdej podgrupy:

$$\bar{R} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i$$

$$R_i = x_{i,max} - x_{i,min}$$

gdzie: k -liczba próbek w podgrupie (w obu przypadkach $k=5$, liczebność próbki $n=5$),

a następnie dla każdej próbki i uśredniono. Wyniki obliczeń rozstępu zestawiono w tablicy 10 i 11.

Tablica 10. Wartości rozstępu dla średnicy 1 wałka

Numer próbki										
Podgrupa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,043	0,029	0,051	0,037	0,037	0,080	0,017	0,034	0,058	0,045
2	0,065	0,025	0,039	0,026	0,044	0,072	0,026	0,022	0,067	0,086
3	0,020	0,037	0,037	0,049	0,052	0,014	0,043	0,029	0,020	0,045
4	0,056	0,055	0,052	0,105	0,041	0,020	0,062	0,038	0,073	0,026
5	0,044	0,034	0,054	0,035	0,030	0,054	0,049	0,034	0,042	0,031
Średnia	0,046	0,036	0,047	0,050	0,041	0,048	0,039	0,031	0,052	0,047
Numer próbki										
Podgrupa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,048	0,043	0,032	0,070	0,059	0,055	0,040	0,060	0,052	0,077
2	0,062	0,053	0,092	0,047	0,039	0,062	0,080	0,022	0,099	0,065
3	0,071	0,029	0,084	0,044	0,023	0,035	0,029	0,018	0,073	0,036
4	0,039	0,061	0,040	0,047	0,063	0,039	0,040	0,077	0,047	0,073
5	0,023	0,020	0,057	0,044	0,070	0,048	0,046	0,054	0,047	0,037
Średnia	0,049	0,041	0,061	0,050	0,051	0,048	0,047	0,046	0,064	0,058
Średnia wartość rozstępu									0,048	

Tablica 11. Wartości rozstępu dla średnicy 2 wałka

Numer próbki										
Podgrupa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,095	0,122	0,093	0,097	0,033	0,121	0,060	0,103	0,049	0,035
2	0,056	0,051	0,032	0,083	0,083	0,066	0,123	0,068	0,119	0,101
3	0,120	0,078	0,072	0,024	0,078	0,052	0,073	0,068	0,116	0,037
4	0,022	0,058	0,048	0,083	0,085	0,042	0,085	0,078	0,030	0,076
5	0,034	0,067	0,064	0,092	0,058	0,052	0,081	0,033	0,085	0,033
Średnia	0,065	0,075	0,062	0,076	0,067	0,067	0,084	0,070	0,080	0,056

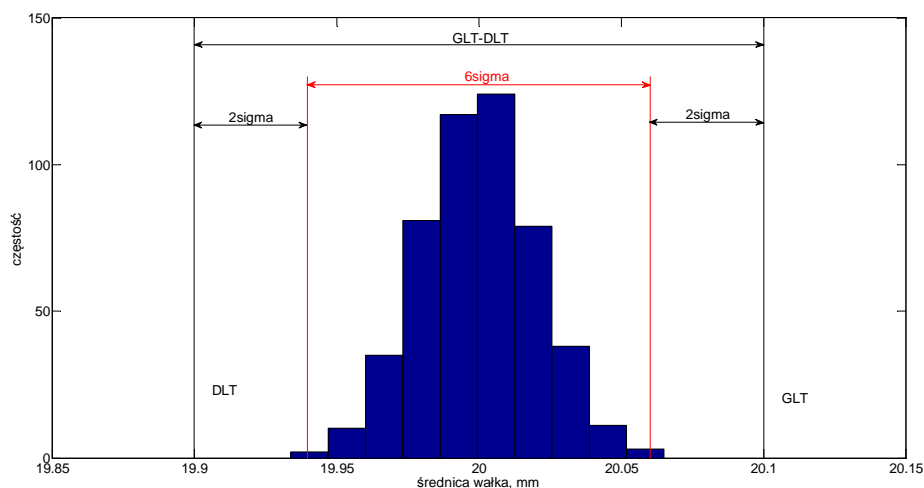
Numer próbki										
Podgrupa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,018	0,056	0,073	0,056	0,064	0,105	0,135	0,061	0,086	0,049
2	0,073	0,076	0,076	0,081	0,029	0,069	0,047	0,028	0,049	0,099
3	0,037	0,009	0,050	0,092	0,095	0,043	0,049	0,042	0,077	0,051
4	0,031	0,085	0,114	0,035	0,044	0,061	0,046	0,059	0,043	0,074
5	0,076	0,074	0,056	0,058	0,095	0,053	0,061	0,048	0,086	0,079
Średnia	0,047	0,060	0,074	0,064	0,065	0,066	0,068	0,048	0,068	0,070

Średnia wartość rozstępu	0,067
---------------------------------	--------------

W końcowym etapie wyznaczono estymator wskaźnika zdolności jakościowej procesu dla średnicy 1 wałka

$$\hat{C}_p = \frac{GLT - DLT}{6 \cdot \frac{\bar{R}}{d_2}} = \frac{20,1 - 19,9}{6 \cdot \frac{0,048}{2,33}} = 1,62$$

Graficzną interpretację wskaźnika C_p przedstawiono na rysunku 4.



Rysunek 4. Graficzna ilustracja wskaźnika C_p

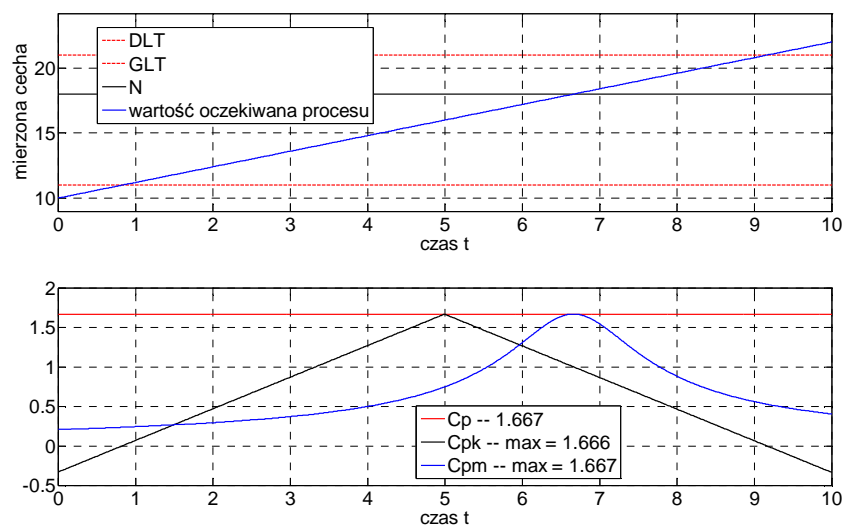
Wartość wskaźnika C_p na poziomie 1,62 informuje, że pole tolerancji obejmuje zakres około $\pm 4.75\sigma$ naturalnej zmienności procesu, co odpowiada udziałowi braków około 2,034e-6%.

Wzór na wartość wskaźnika C_p zakłada, że wartość nominalna znajduje się dokładnie pośrodku pola tolerancji. Założenie takie jest niepoprawne w przypadku oceny zdolności jakościowej procesu dla średnicy 2 wałka. W takim przypadku, do oceny zmienności procesu zastosowano wskaźnik C_{pm} :

$$C_{pm} = \frac{GLT - DLT}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - N)^2}} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - N)^2}}$$

gdzie: $d = (GLT - DLT)/2$ - połowa szerokości pola tolerancji, N - wartość nominalna.

Graficznie przebieg wartości wskaźnika C_{pm} wraz ze zmianą wartości oczekiwanej procesu przedstawiono na rysunku (rys. **Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu..1**)



Rysunek 5. Graficzna ilustracja zmiany wartości wskaźnika C_p i C_{pm} wraz ze zmianą wartości oczekiwanej

Wskaźnik C_{pm} przyjmuje wartość maksymalną dla średniej równej wartości nominalnej (w tym przypadku $N = 18$). Wartość wskaźnika zmniejsza się wraz ze wzrostem odchylenia wartości średniej od nominalnej. Wadą wskaźnika jest fakt, że nie przyjmuje od jednakowej wartości po osiągnięciu przez średnią granic tolerancji, co w połączeniu z nieliniowym charakterem tej funkcji powoduje dodatkowe problemy interpretacyjne. Przyjmowanie przez wskaźnik różnych wartości w przypadku, gdy wartość średnia znajduje się w granicy tolerancji jest spowodowane faktem, że wartość licznika nie uwzględnia niesymetryczności pól tolerancji względem położenia wartości nominalnej.

Wartość wskaźnika C_{pm} dla średnicy 2 wałka wynosi:

$$\hat{C}_{pm} = \frac{0,15}{3\sqrt{\left(\frac{0,067}{2,33}\right)^2 + (30 - 30)^2}} = 1,74$$

Wartość wskaźnika C_{pm} na poziomie 1,74 informuje, że pole tolerancji obejmuje zakres około $\pm 5.25\sigma$ naturalnej zmienności procesu, co odpowiada udziałowi braków około 1,521e-7%.

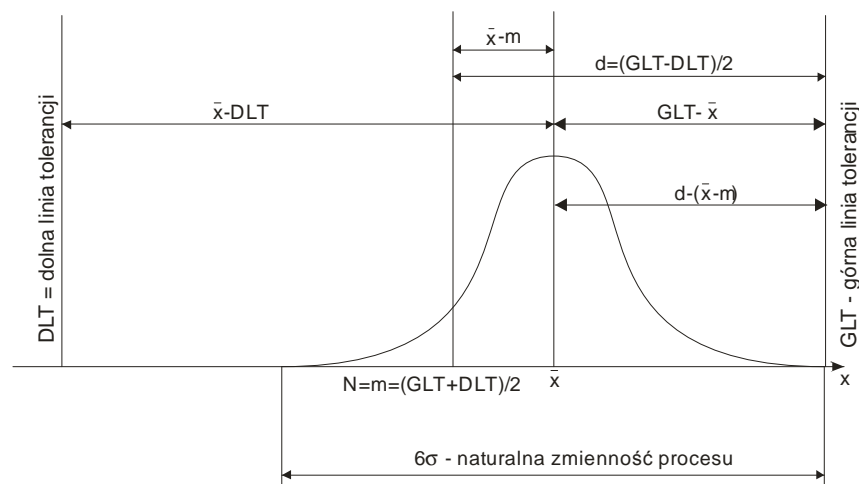
Ocena wycentrowania procesu

Ocena wycentrowania procesu umożliwia określenie czy wartość średnia obserwowanej charakterystyki pokrywa się z wartością nominalną.

Wskaźnik C_{pk} uwzględnienia przesunięcie wartości oczekiwanej i odnosi wartości tego przesunięcia do naturalnej zmienności procesu.

$$C_{pk} = \min\left(\frac{GLT - \bar{x}}{3\sigma}, \frac{\bar{x} - DLT}{3\sigma}\right) = \frac{d - |\mu - m|}{3\sigma}$$

gdzie: \bar{x} - średnia procesu, m - środek pola tolerancji $m = (GLT + DLT)/2$, $d = (GLT - DLT)/2$ - połowa szerokości pola tolerancji.



Rysunek 6. Graficzna ilustracja wskaźnika C_{pk}

Wartość wskaźnika C_{pk} dla średnicy 1 wałka wynosi:

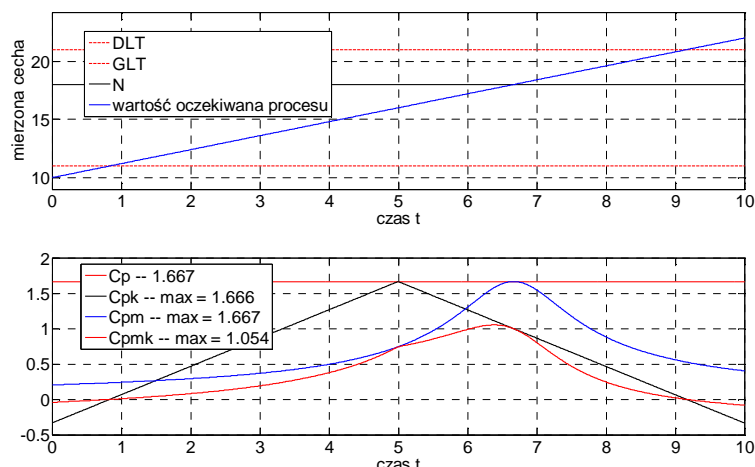
$$\hat{C}_{pk} = \frac{d - |\mu - m|}{3\sigma} = \frac{0,1 - |20 - 20|}{3 \cdot \frac{0,048}{2,33}} = 1,62$$

Wartość wskaźnika C_{pk} odpowiada wartości wskaźnika C_p co oznacza, że wartość średnia średnicy obrabianego wałka jest zgodna z jej wartością nominalną (nie następuje przesunięcie wartości średniej).

Dla oceny wycentrowania procesu w przypadku średnicy 2 wałka z uwagi na fakt, że wartość nominalna nie leży pośrodku pola tolerancji wyznaczono wskaźnik C_{pmk} :

$$C_{pmk} = \min\left(\frac{GLT - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - N)^2}}, \frac{\mu - DLT}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - N)^2}}\right) = \frac{d - |\mu - m|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - N)^2}}$$

Graficznie przebieg wartości wskaźnika C_{pmk} wraz ze zmianą wartości oczekiwanej procesu przedstawiono na rysunku (rys.7)



Rysunek 7. Zmiana wartości wskaźnika C_{pk} , C_{pm} i C_{pmk} wraz ze zmianą wartości oczekiwanej procesu

W przypadku drugiej średnicy wałka wskaźnik C_{pmk} ma wartość:

$$C_{pmk} = \frac{d - |\mu - m|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - N)^2}} = \frac{0,15 - |30 - 29,95|}{3\sqrt{\left(\frac{0,067}{2,33}\right)^2 + (30 - 30)^2}} = 1,16$$

Wartość wskaźnika C_{pmk} jest znacząco niższa niż wartość wskaźnika C_{pm} , wynika to z przesunięcia wartości średniej procesu względem środka pola tolerancji. Wartość wskaźnika C_{pm} na poziomie 1,74 informuje, że pole tolerancji obejmuje zakres około $\pm 5.25\sigma$ naturalnej zmienności procesu, co odpowiada udziałowi braków około 1,521e-7%.

Wszystkie wyznaczone wskaźniki oceny zdolności jakościowej wykorzystują jako estymator odchylenia standardowego wartość rozrzutu (zgodnie z wzorem Hartley'a). Estymatory te uwzględniają jedynie zmienność krótkookresową. W praktyce wartość odchylenia krótkookresowego wyznaczana jest z kart kontrolnych i określa tzw. odchylenie wewnątrzpróbkowe.

Na podstawie danych zawartych w kartach kontrolnych i zbieranych w długim przedziale czasowym, możliwe jest wyznaczenie odchylenia długookresowego. Wartości wskaźników długookresowych poprzedzane są indeksem P zamiast C, np. P_p , P_{pk} , etc. Różnica przy obliczaniu wartości tych wskaźników wynika jedynie z innej metody wyznaczania odchylenia standardowego (w przypadku wskaźników długookresowych uwzględniając wszystkie pojedyncze pomiary):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Jeżeli odchylenie długookresowe jest znacząco większe od krótkookresowego to proces jest niestabilny (posiada dużą zmienność wewnątrzpróbkową). W przypadku, gdy nie możemy uczynić założenia, że proces jest ustabilizowany, to jako istotne należy przyjąć długookresowe wskaźniki zdolności jakościowej procesu.

Wirtualne laboratoria: Zadania do samodzielnego rozwiązania i analizy powinny umożliwiać generowanie, rozwiązywanie i analizę przypadków dla krótkookresowej i długookresowej oceny zdolności jakościowej procesów o rozkładzie normalnym dla przypadków tolerowanych obustronnie i jednostronnie (np. chropowatości, zgodnie z aktualnie obowiązującymi normami) pozwalających na ocenę poprawności zastosowania i analizy wszystkich przedstawionych wskaźników jakości procesu.

Zadania powinny umożliwiać losowy wyznaczenie wartości o rozkładzie normalnym o N próbkach i K pomiarach. Na podstawie wygenerowanych danych student powinien mieć możliwość samodzielnego przejścia przez wszystkie niezbędne kroki wymagane do wyznaczenia a następnie dokonania interpretacji wskaźników oceny zdolności jakościowej procesu.

Interpretacja danych procesowych oraz wskaźników oceny zdolności jakościowej powinna być również interpretowana graficznie.

Laboratorium pozwala zweryfikować następujące założenia procesu kształcenia:

- Student ma podstawową wiedzę w zakresie algorytmów i technik obliczeniowych ze szczególnym uwzględnieniem metod numerycznych stosowanych do znajdowania rozwiązań prostych zagadnień i problemów technicznych oraz prowadzenia symulacji numerycznych niezbędnych w procesie projektowania, wytwarzania i eksploatacji maszyn
- Student ma podstawową wiedzę w zakresie zastosowań technologii informacyjnych niezbędną do przetwarzania i analizy danych inżynierskich oraz stosowania technik prezentacyjnych i komunikacyjnych
- Student ma podstawową wiedzę w zakresie zastosowań technologii informacyjnych w przemyśle obejmującą metody analizy i przetwarzania danych dotyczących procesów wytwarzania, prognozowanie programów produkcyjnych oraz optymalizację wykorzystania zasobów niezbędną do tworzenia i wdrażania innowacji oraz zarządzania i kierowania procesem produkcyjnym
- Student potrafi analizować i integrować informacje, dokonywać ich interpretacji, a także wyciągać wnioski oraz formułować i uzasadniać opinie
- Student potrafi opracować dokumentację dotyczącą realizacji zadania inżynierskiego i przygotować tekst zawierający omówienie wyników realizacji tego zadania
- Student potrafi posłużyć się właściwie dobranym środowiskiem obliczeniowo-programistycznym oraz stworzyć proste algorytmy niezbędne do prowadzenia analiz i rozwiązywania prostych problemów technicznych